SEMESTRAL

UNI

academiacesarvallejo.edu.pe

ACADEMIA CÉSAR VALLEJO

ACADEMIA CÉSAR VALLEJO

ACADEMIA CÉSAR VALLEJO

ACADEMIA CÉSAR VALLEJO

SEMESTRAL

UNI

ACADEMIA CÉSAR VALLEJO

ACADEMIA CÉSAR VALLEJO

GEOMETRÍA

Geometría del Espacio II

PLANA DE GEOMETRÍA

academiacesarvallejo.edu.pe

GEOMETRÍA DEL ESPACIO II

OBJETIVOS

1. CONOCER EL TEOREMA DE LAS TRES PERPENDICULARES.

2. PRESENTAR AL ÁNGULO DIEDRO, LOS PLANOS PERPENDICULARES, TEOREMAS Y DISTANCIA ENTRE RECTAS ALABEADAS.

3. APLICAR LOS TEOREMAS EN LOS PROBLEMAS TIPO EXAMEN DE ADMISIÓN UNI.

TEOREMA DE LAS TRES PERPENDICULARES

Sea $\overleftrightarrow{AB}$ contenida en el plano $\mathbb{H}$ y $P \in$ ▬$\mathbb{H}$ y exterior a $\overleftrightarrow{AB}$.

PRIMERA PERPENDICULAR

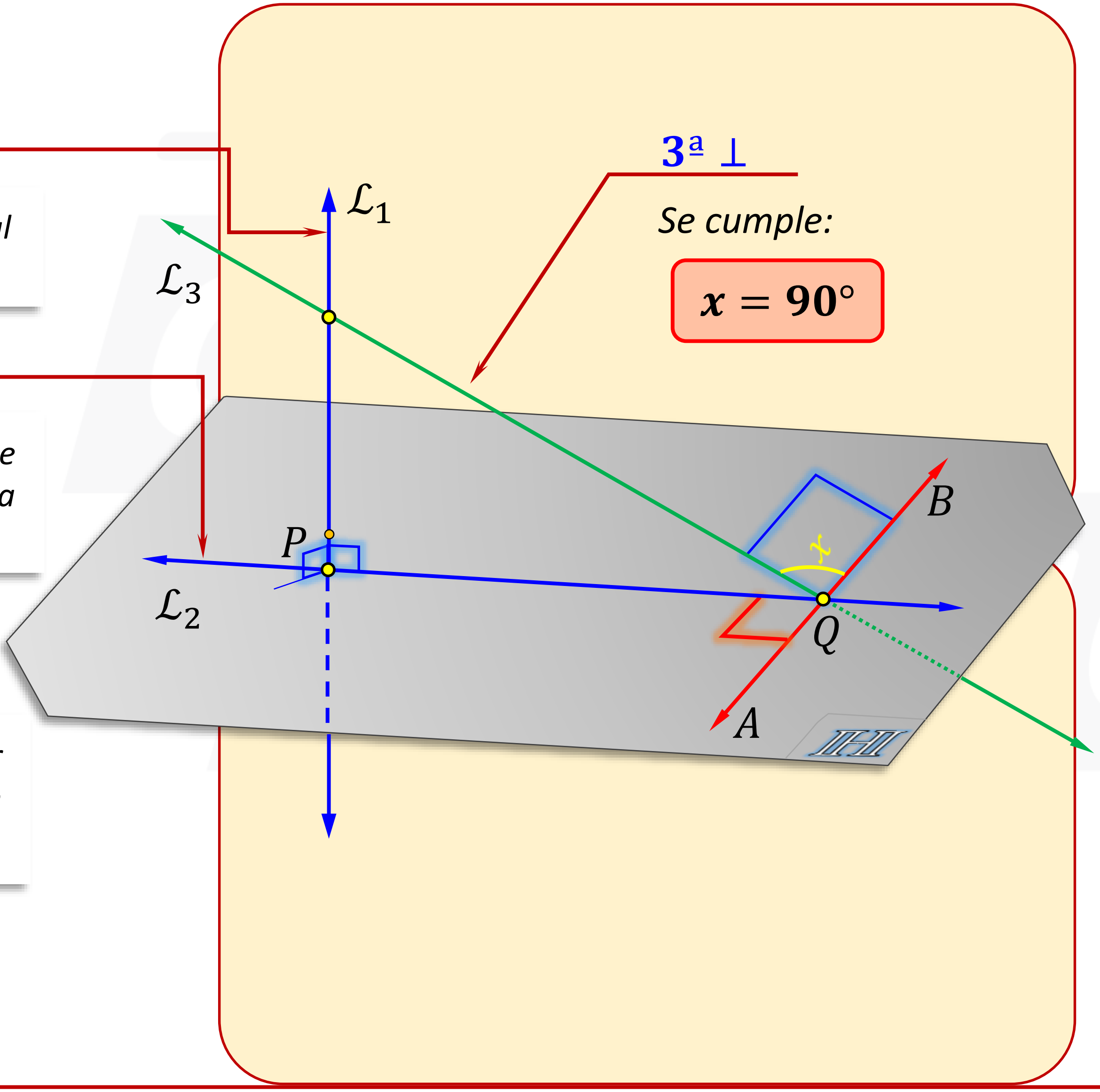
Es la recta $\overleftrightarrow{\mathcal{L}_1}$ perpendicular al plano $\mathbb{H}$, trazada por P.

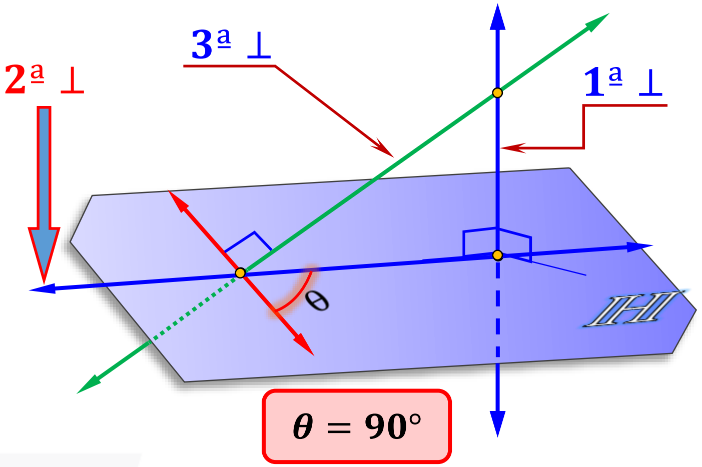
SEGUNDA PERPENDICULAR

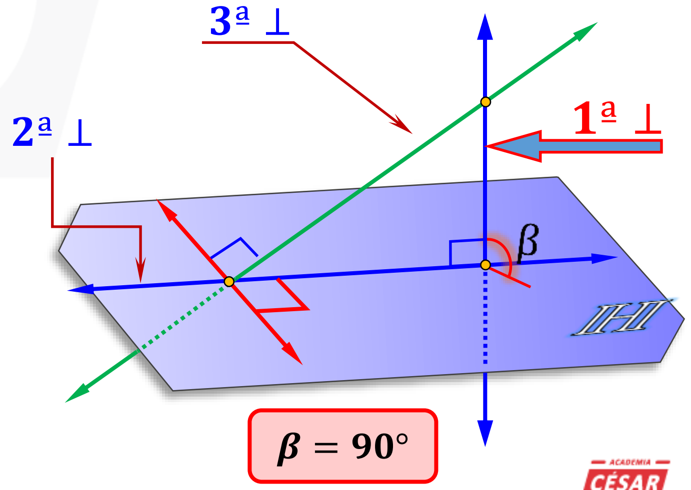
Es la recta $\overleftrightarrow{\mathcal{L}_2}$, que contiene al pie de la 1ª ⊥ y es perpendicular a la recta AB en Q.

TERCERA PERPENDICULAR

Es la recta que pasa por Q y por cualquier punto de la 1ª ⊥, en este caso $\overleftrightarrow{\mathcal{L}_3} \perp \overleftrightarrow{AB}$.





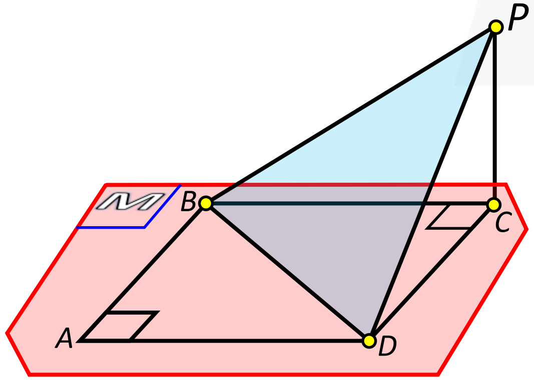


ACADEMIA CÉSAR VALLEJO

TEOREMA DE LAS TRES PERPENDICULARES

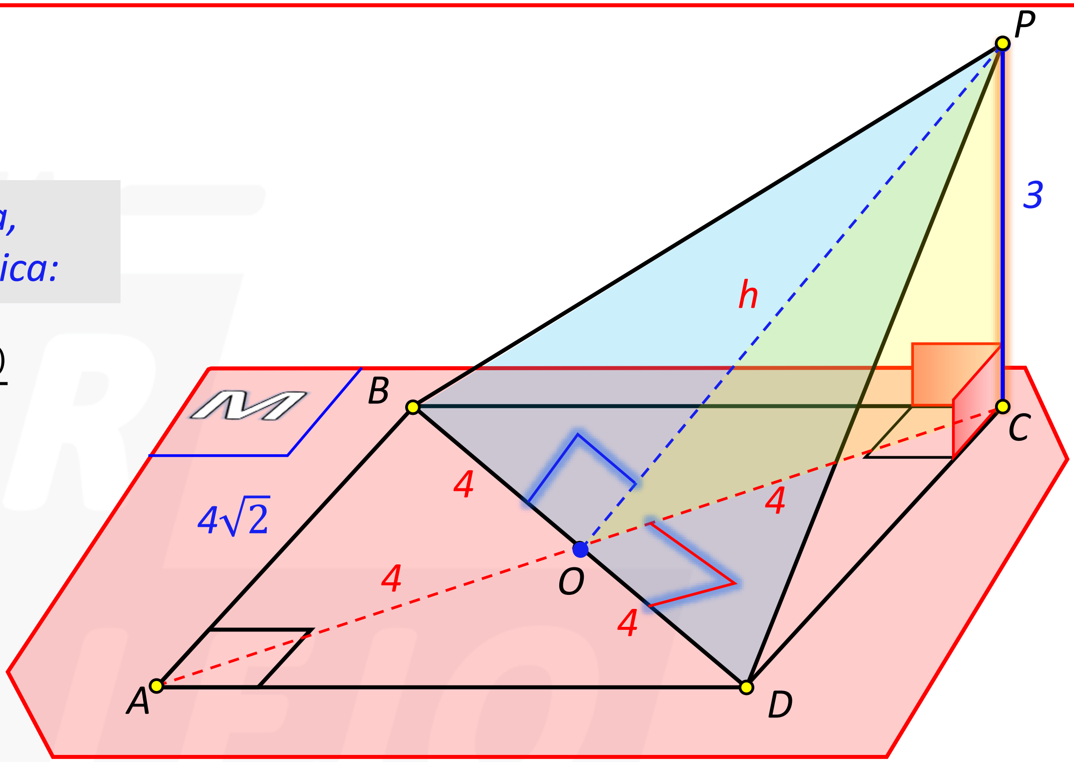
APLICACIÓN

Del gráfico ABCD es un cuadrado, donde PC es perpendicular al plano que contiene al dicho cuadrado, si PC=3 y $AB=4\sqrt{2}$. Calcule el área de la región BPD.



Para el cálculo del área, usamos la formula básica:

$$A_{BPD}=\frac{(base)(altura)}{2}$$



- Como ABCD es un cuadrado: BD=8
- Por teorema de las tres perpendiculares:
  $\overline{PC}$: 1° ⊥ (al plano)
  $\overline{CA}$: 2° ⊥ (a $\overline{BD}$)
  $\overline{PO}$: 3° ⊥ (a $\overline{BD}$)
- En el ⊿PCO notable de 37° y 53°:
  PO = h = 5

$$A_{BPD}=\frac{(8)(5)}{2}$$

$$A_{BPD}=20$$

ÁNGULO DIEDRO

DEFINICIÓN

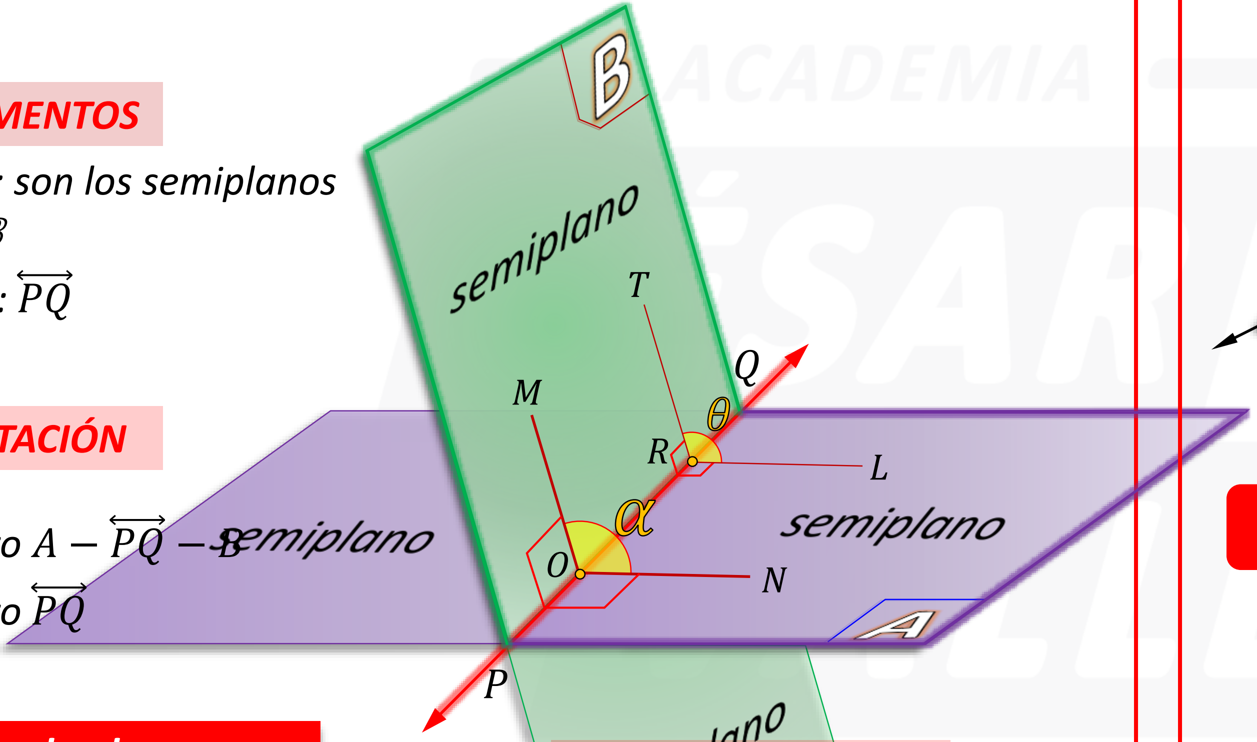
Es la figura geométrica formada por la unión de dos semiplanos no coplanares que tienen la recta de origen en común.

ELEMENTOS

- *Caras: son los semiplanos* $\mathbb{A}$ y $\mathbb{B}$
- *Arista:* $\overleftrightarrow{PQ}$

NOTACIÓN

- Diedro $A-\overleftrightarrow{PQ}-B$
- Diedro $\overleftrightarrow{PQ}$



Ángulo plano o rectilíneo de un diedro

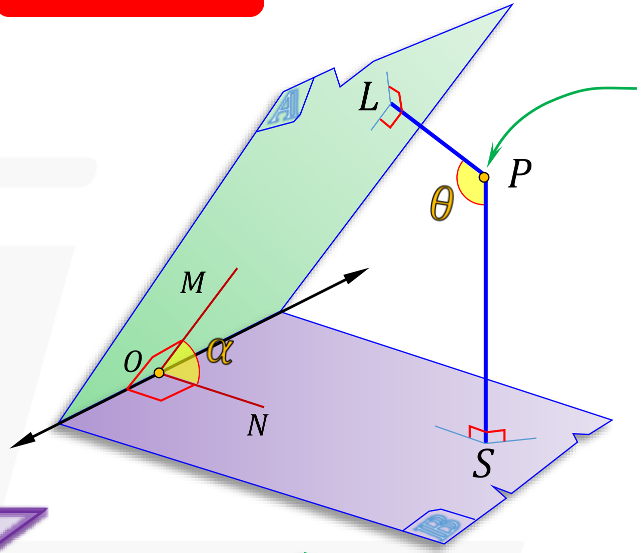
$\measuredangle MON$: *Ángulo plano del diedro* $A-\overleftrightarrow{PQ}-B$

Medida del diedro

Es la medida de su ángulo plano o rectilíneo.

α: medida de $A-\overleftrightarrow{PQ}-B$

TEOREMA



Punto cualquiera en la región interior del diedro

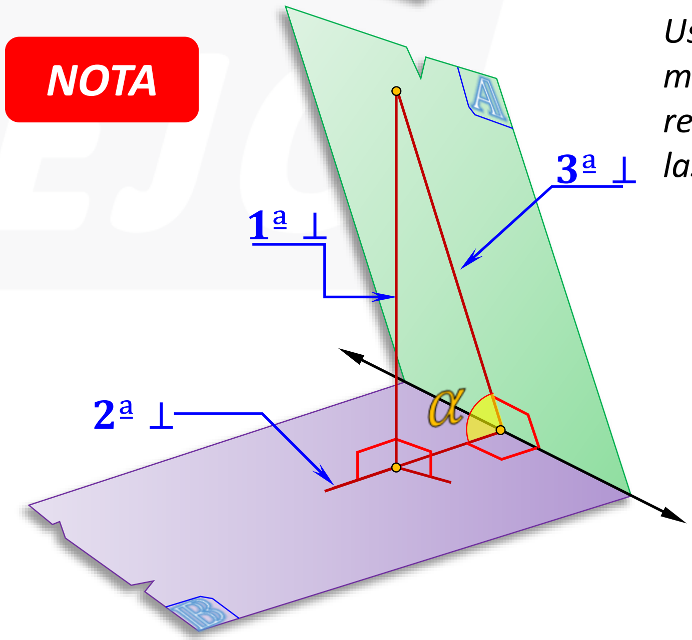
$\overline{PL} \perp \mathbb{A}$

$\overline{PS} \perp \mathbb{B}$

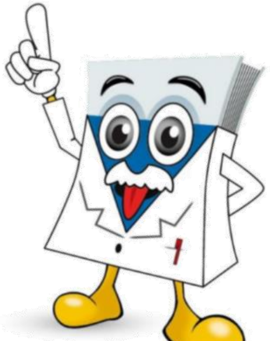
Se cumple:

$$\alpha+\theta=180°$$

NOTA



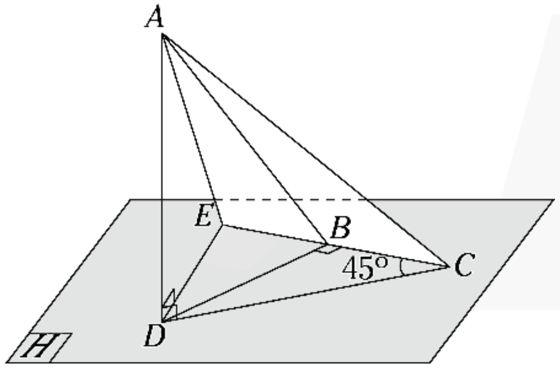
Usualmente para ubicar la medida de un diedro, recurrimos al teorema de las tres perpendiculares.

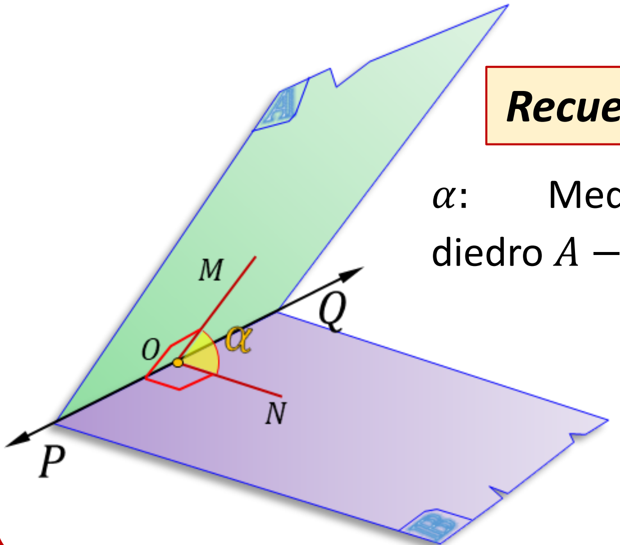


CÉSAR VALLEJO

APLICACIÓN

Según el gráfico, $AB = 2(BC)$. Calcule la medida del ángulo diedro entre las regiones EDC y EAC.



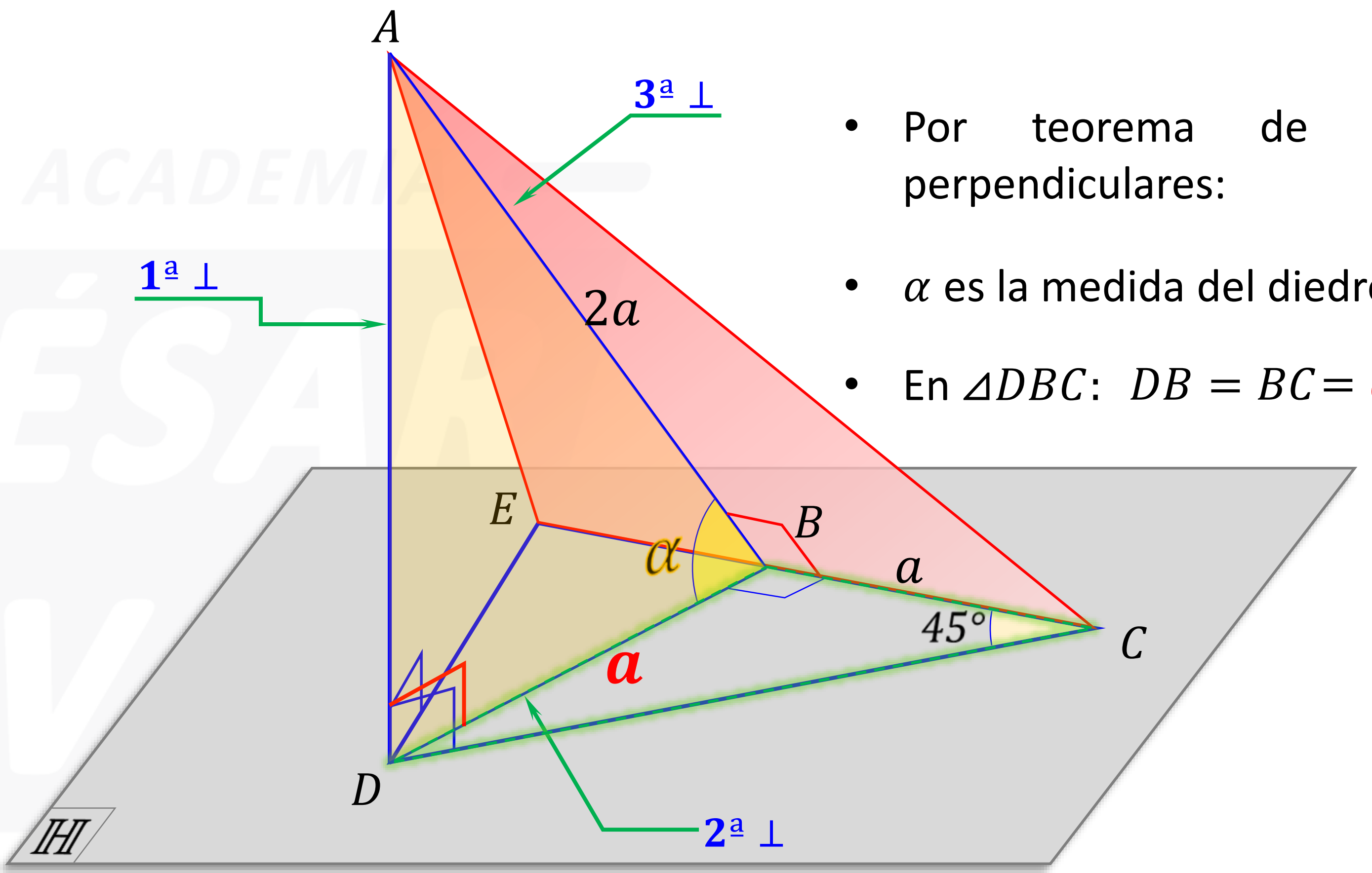


Recuerda

α: Medida del diedro $A - \overleftrightarrow{PQ} - B$

Resolución: Piden medida del diedro

$$A - \overline{EC} - D$$



- Por teorema de las tres perpendiculares:
- α es la medida del diedro $A - \overline{EC} - D$
- En $\triangle DBC$: $DB = BC = a$
- Finalmente en $\triangle ADB$ notable de 30° y 60°

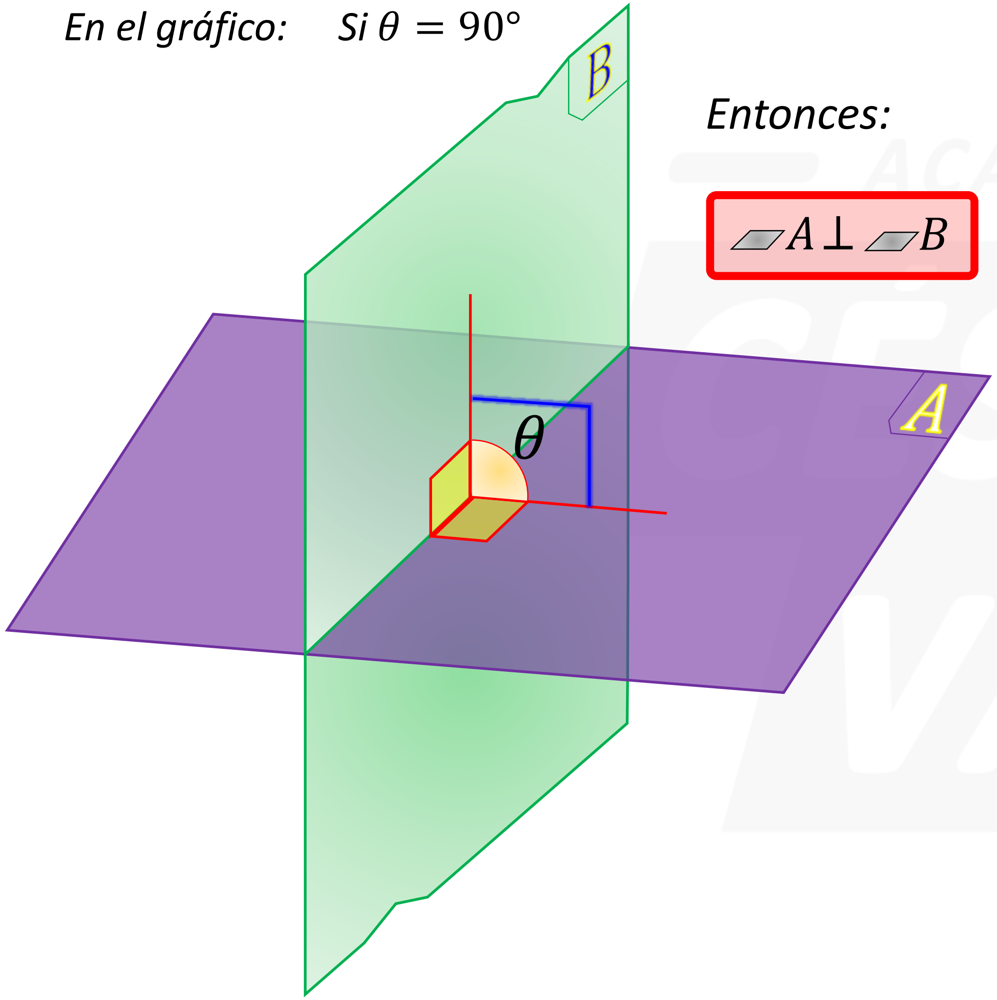
$$\boldsymbol{\alpha = 60°}$$

ACADEMIA CÉSAR VALLEJO

ÁNGULO DIEDRO

PLANOS PERPENDICULARES

En el gráfico: Si $\theta = 90°$



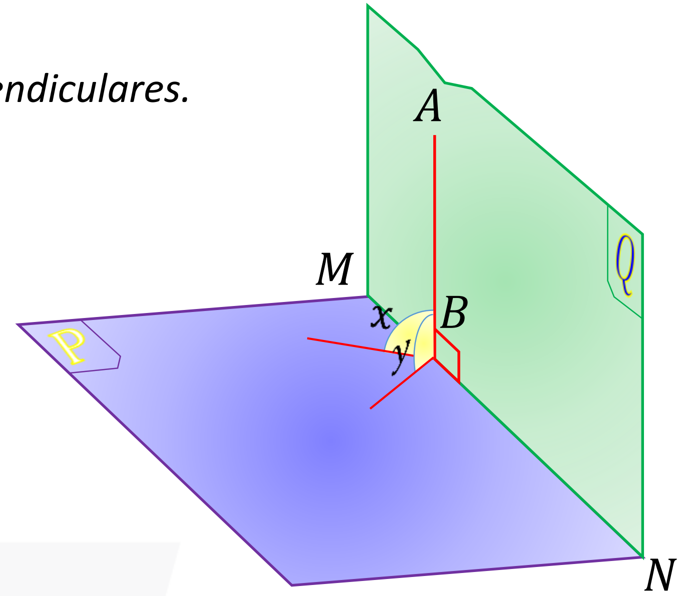
Entonces:

▱$A \perp$ ▱B

TEOREMA

Si los planos mostrados son perpendiculares.

y $\overline{AB} \perp \overline{MN}$, *donde* $\overline{MN}$: *Arista*



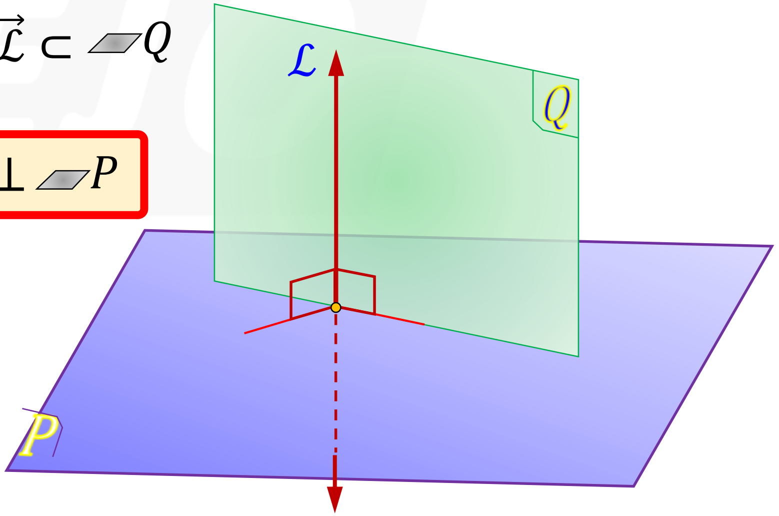
Se cumple: $\overline{AB} \perp$ ▱P

Entonces:

$$\boldsymbol{x = y = 90°}$$

TEOREMA

Si $\overleftrightarrow{\mathcal{L}} \perp$ ▱P *y* $\overleftrightarrow{\mathcal{L}} \subset$ ▱Q



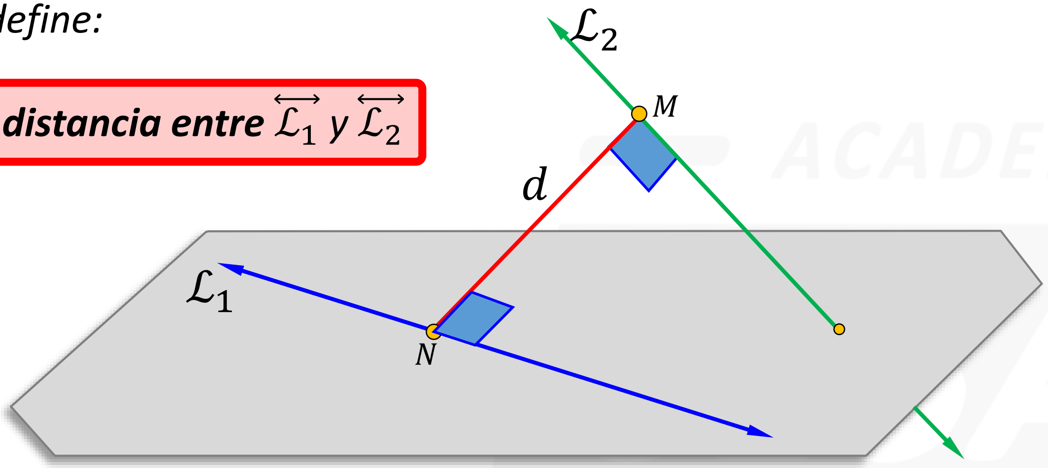
Entonces: ▱$Q \perp$ ▱P

ACADEMIA CÉSAR VALLEJO

DISTANCIA ENTRE RECTAS ALABEADAS

Sean $\overleftrightarrow{\mathcal{L}_1}$ y $\overleftrightarrow{\mathcal{L}_2}$ dos rectas alabeadas, además $\overline{MN} \perp \overleftrightarrow{\mathcal{L}_1}$ y $\overline{MN} \perp \overleftrightarrow{\mathcal{L}_2}$.
Se define:

d: distancia entre $\overleftrightarrow{\mathcal{L}_1}$ y $\overleftrightarrow{\mathcal{L}_2}$

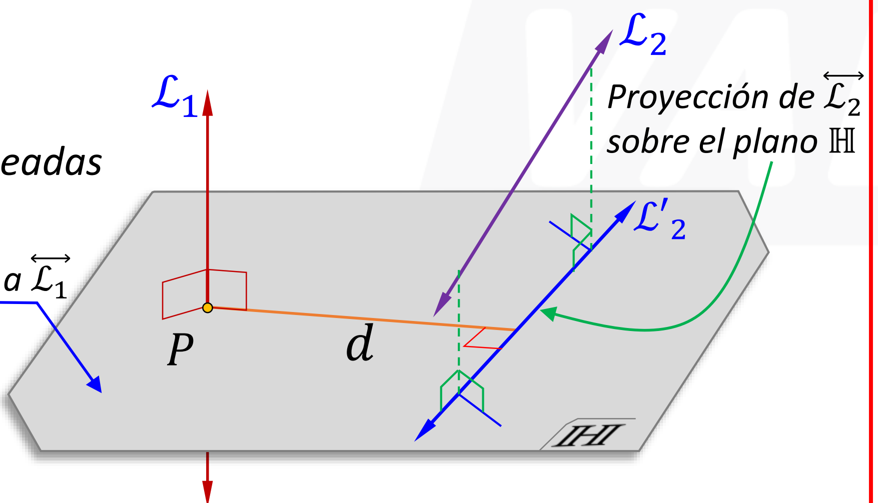


Calculalo de la distancia entre dos rectas alabeadas

Método 1

Sean $\overleftrightarrow{\mathcal{L}_1}$ y $\overleftrightarrow{\mathcal{L}_2}$ alabeadas

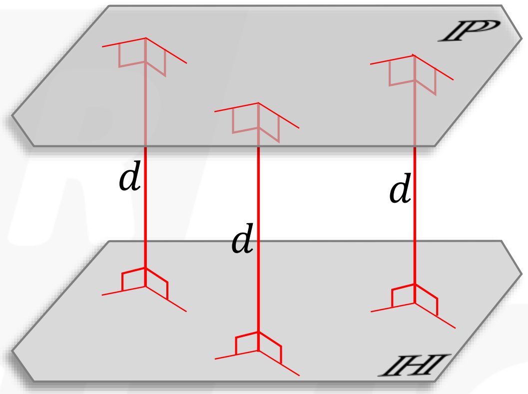
Plano perpendicular a $\overleftrightarrow{\mathcal{L}_1}$



d: Es la distancia entre $\overleftrightarrow{\mathcal{L}_1}$ y $\overleftrightarrow{\mathcal{L}_2}$

Método 2

Tener en cuenta: *Si $\mathbb{P} \parallel \mathbb{H}$*

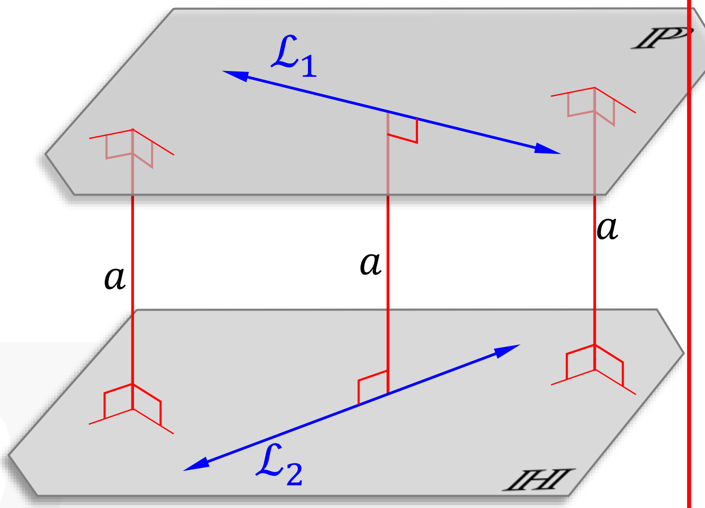


La distancia entre los planos, es igual a la longitud del segmento perpendicular a ambos, con sus extremos en dichos planos.

d: Es la distancia entre los planos $\mathbb{P}$ y $\mathbb{H}$.

❖ *Sean $\overleftrightarrow{\mathcal{L}_1}$ y $\overleftrightarrow{\mathcal{L}_2}$ alabeadas*
$\overleftrightarrow{\mathcal{L}_1} \subset \mathbb{P}$, $\overleftrightarrow{\mathcal{L}_2} \subset \mathbb{H}$

Si $\mathbb{P} \parallel \mathbb{H}$

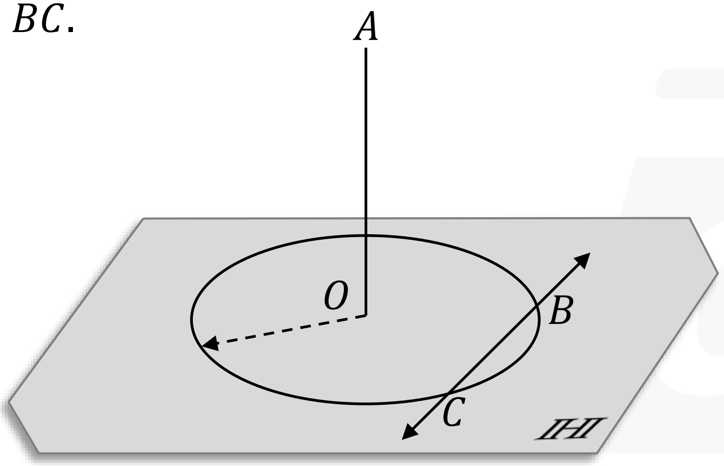


La distancia entre $\overleftrightarrow{\mathcal{L}_1}$ y $\overleftrightarrow{\mathcal{L}_2}$ es igual a la distancia entre los planos.

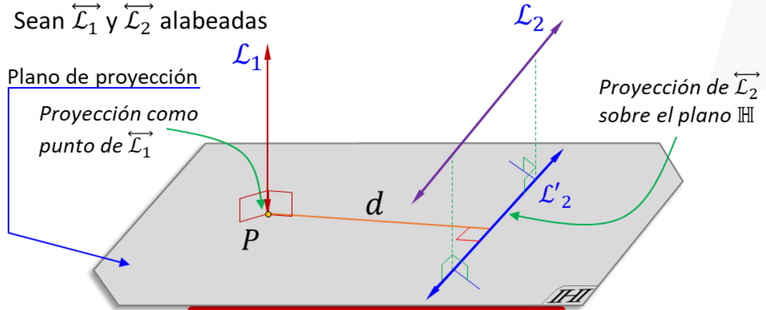
$$d(\overleftrightarrow{\mathcal{L}_1};\overleftrightarrow{\mathcal{L}_2}) = d(\mathbb{P};\mathbb{H})$$

APLICACIÓN

En el gráfico mostrado $\overline{OA} \perp$ ▰ℍ, la medida del arco BC es $60°$ y además $BC = 6$, calcule la distancia entre $\overline{OA}$ y $\overline{BC}$.



RECUERDA



d: Es la distancia entre $\overleftrightarrow{\mathcal{L}_1}$ y $\overleftrightarrow{\mathcal{L}_2}$

Resolución: Piden $d(\overline{OA}; \overline{BC}) = \boldsymbol{x}$

Datos:

$\overline{OA} \perp$ ▰ℍ

$m\overset{\frown}{BC} = 60°$

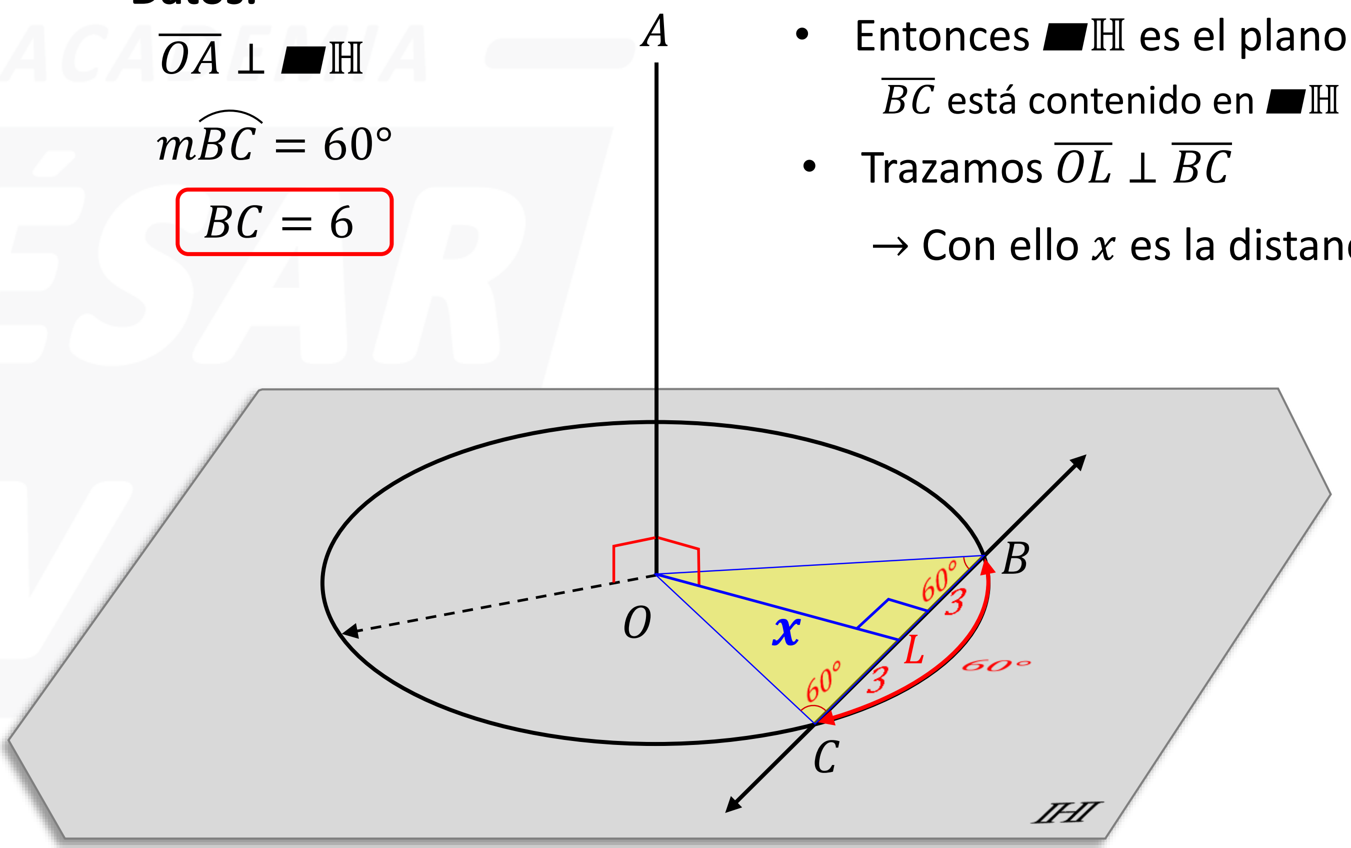
$BC = 6$

- En el problema notamos que:

  O es la proyección como punto de $\overline{OA}$ sobre ▰ℍ
- Entonces ▰ℍ es el plano de proyección

  $\overline{BC}$ está contenido en ▰ℍ
- Trazamos $\overline{OL} \perp \overline{BC}$

  → Con ello x es la distancia pedida



- Además $BL = LC = 3$
- ΔBOC es equilátero

$\therefore \boldsymbol{x = 3\sqrt{3}}$

ACADEMIA
CÉSAR VALLEJO

GRACIAS

SÍGUENOS:

academiacesarvallejo.edu.pe

ACADEMIA
CÉSAR VALLEJO